Próbny Egzamin Maturalny z Matematyki

POZIOM PODSTAWOWY

CKE

3 kwietnia 2020

Czas pracy: 170 minut

Zadania zamknięte

Zadanie 1 (1 pkt)

Niech $a = -2$ i $b = 3$. Wartość wyrażenia $a^b - b^a$ jest równa

A) $\frac{73}{9}$ B) $\frac{71}{9}$ C) $-\frac{73}{9}$ D) $-\frac{71}{9}$

Rozwiązanie

Liczymy

$$a^b - b^a = (-2)^3 - 3^{-2} = -8 - \frac{1}{3^2} = -8 - \frac{1}{9} = -\frac{73}{9}.$$

Odpowiedź: **C**

Zadanie 2 (1 pkt)

Liczba $9^9 \cdot 81^2$ jest równa

A) 81^4 B) 81 C) 9^{13} D) 9^{36}

Rozwiązanie

Liczymy

$$9^9 \cdot 81^2 = 9^9 \cdot \left(9^2\right)^2 = 9^9 \cdot 9^4 = 9^{9+4} = 9^{13}.$$

Odpowiedź: **C**

Zadanie 3 (1 pkt)

Wartość wyrażenia $\log_4 8 + 5\log_4 2$ jest równa

A) 2 B) 4 C) $2 + \log_4 5$ D) $1 + \log_4 10$

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzorów

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$$
$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

Sposób I

Liczymy

$$\log_4 8 + 5\log_4 2 = \log_4 2^3 + \log_4 2^5 = \log_4 \left(2^3 \cdot 2^5\right) = \log_4 2^8 =$$
$$= \log_4 \left(2^2\right)^4 = \log_4 4^4 = 4.$$

Sposób II

Liczymy

$$\log_4 8 + 5\log_4 2 = \log_4 2^3 + 5\log_4 2 = \log_4 (2^2)^{\frac{3}{2}} + 5\log_4 (2^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \log_4 4^{\frac{3}{2}} + 5\log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4.$$

Odpowiedź: **B**

Zadania.info
Podobają Ci się nasze rozwiązania?
Pokaż je koleżankom i kolegom ze szkoły!

Zadanie 4 (1 pkt)

Dane są dwa koła. Promień pierwszego koła jest większy od promienia drugiego koła o 30%. Wynika stąd, że pole pierwszego koła jest większe od pola drugiego koła

A) o mniej niż 50%, ale więcej niż 40%.
B) o mniej niż 60% , ale więcej niż 50%.
C) dokładnie o 60%.
D) o więcej niż 60%.

Rozwiązanie

Oznaczamy przez R promień koła większego, a przez r promień koła mniejszego. Mamy zatem

$$R = 130\% r = 1,3r.$$

Zatem

$$\pi R^2 = \pi(1,3r)^2 = \pi \cdot 1,69r^2 = 169\% \cdot \pi r^2.$$

To oznacza, że pole pierwszego koła jest większe o 69% od pola drugiego koła.

Odpowiedź: **D**

Zadanie 5 (1 pkt)

Liczba $(2\sqrt{7}-5)^2 \cdot (2\sqrt{7}+5)^2$ jest równa

A) 9 B) 3 C) 2809 D) $28-20\sqrt{7}$

Rozwiązanie

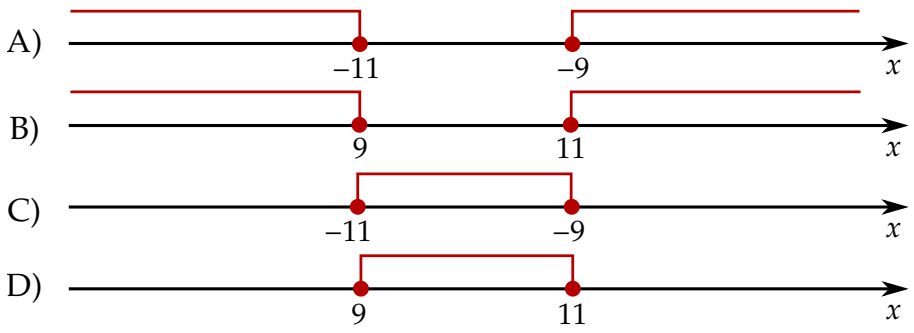
Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$(2\sqrt{7}-5)^2 \cdot (2\sqrt{7}+5)^2 = \left((2\sqrt{7}-5)(2\sqrt{7}+5)\right)^2 =$$
$$= \left((2\sqrt{7})^2 - 5^2\right)^2 = (28-25)^2 = 3^2 = 9.$$

Odpowiedź: **A**

Zadanie 6 (1 pkt)

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór wszystkich liczb x spełniających warunek: $11 \leqslant 2x-7 \leqslant 15$.



Rozwiązanie

Przekształćmy daną nierówność

$$\begin{aligned} &11 \leqslant 2x-7 \leqslant 15 \quad / +7 \\ &18 \leqslant 2x \leqslant 22 \quad / :2 \\ &9 \leqslant x \leqslant 11. \end{aligned}$$

Taki przedział jest zaznaczony na rysunku D.

Odpowiedź: **D**

Zadanie 7 (1 pkt)

Rozważmy treść następującego zadania:
Obwód prostokąta o bokach długości a i b jest równy 60. Jeden z boków tego prostokąta jest o 10 dłuższy od drugiego. Oblicz długości boków tego prostokąta.
Który układ równań opisuje zależności między długościami boków tego prostokąta?

A) $\begin{cases} 2(a+b)=60 \\ a+10=b \end{cases}$ B) $\begin{cases} 2a+b=60 \\ 10b=a \end{cases}$ C) $\begin{cases} 2ab=60 \\ a-b=10 \end{cases}$ D) $\begin{cases} 2(a+b)=60 \\ 10a=b \end{cases}$

Rozwiązanie

Obwód prostokąta o bokach a i b jest równy $2a + 2b = 2(a + b)$, więc informacja o obwodzie prowadzi do równania

$$2(a + b) = 60.$$

Drugą informację możemy zapisać w postaci $a = b + 10$ lub $b = a + 10$ (w zależności od tego, który z boków prostokąta jest dłuższy).

Odpowiedź: **A**

Zadanie 8 (1 pkt)

Rozwiązaniem równania $\frac{x+1}{x+2} = 3$, gdzie $x \neq -2$ jest liczba należąca do przedziału

A) $(-2, 1)$ B) $\langle 1, +\infty)$ C) $(-\infty, -5)$ D) $\langle -5, -2)$

Rozwiązanie

Rozwiązujemy równanie

$$\begin{aligned} &\frac{x+1}{x+2} = 3 \quad / \cdot (x+2) \\ &x + 1 = 3x + 6 \\ &2x = -5 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{5}{2} = -2,5. \end{aligned}$$

Odpowiedź: **D**

Zadanie 9 (1 pkt)

Linę o długości 100 metrów rozcięto na trzy części, których długości pozostają w stosunku $3 : 4 : 5$. Stąd wynika, że najdłuższa z tych części ma długość

A) $41\frac{2}{3}$ metra B) $33\frac{1}{3}$ metra C) 60 metrów D) 25 metrów

Rozwiązanie

Najdłuższa część stanowi

$$\frac{5}{3+4+5} = \frac{5}{12}$$

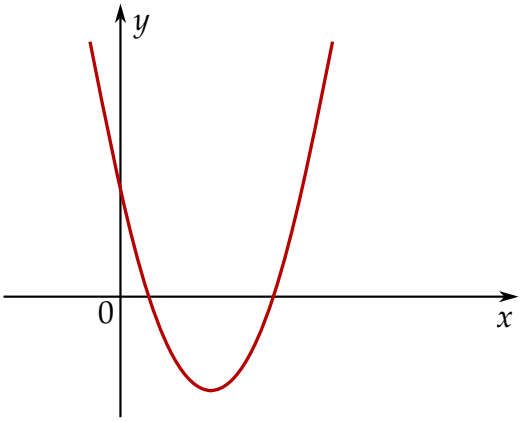
długości całego drutu, czyli

$$\frac{5}{12} \cdot 100 = \frac{5}{3} \cdot 25 = \frac{125}{3} = 41\frac{2}{3}.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 10 (1 PKT)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = x^2 + bx + c$.



Współczynniki b i c spełniają warunki:

A) $b < 0,\ c > 0$ B) $b < 0,\ c < 0$ C) $b > 0,\ c > 0$ D) $b > 0,\ c < 0$

ROZWIĄZANIE

Ramiona paraboli będącej wykresem funkcji f są skierowane do góry, więc na pewno $a > 0$. Widać ponadto, że pierwsza współrzędna jej wierzchołka jest dodatnia, więc

$$0 < x_w = -\frac{b}{2a} \quad \Rightarrow \quad b < 0.$$

Na koniec zauważmy, że

$$0 < f(0) = c.$$

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 11 (1 PKT)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, o którym wiemy, że: $a_1 = 2$ i $a_2 = 9$. Wtedy $a_n = 79$ dla

A) $n = 10$ B) $n = 11$ C) $n = 12$ D) $n = 13$

ROZWIĄZANIE

Obliczamy różnicę ciągu

$$r = a_2 - a_1 = 9 - 2 = 7.$$

W takim razie

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + 7(n-1) = 7n - 5.$$

Pozostało rozwiązać równanie

$$79 = a_n = 7n - 5$$
$$84 = 7n \quad \Rightarrow \quad n = 12.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 12 (1 PKT)

Dany jest trzywyrazowy ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich: $(81, 3x, 4)$. Stąd wynika, że

A) $x = 18$ B) $x = 6$ C) $x = \frac{85}{6}$ D) $x = \frac{6}{85}$

ROZWIĄZANIE

Jeżeli trzy liczby a, b, c są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego to $b^2 = ac$. Daje to nam równanie

$$\begin{aligned} (3x)^2 &= 81 \cdot 4 \quad / : 9 \\ x^2 &= 9 \cdot 4 = 36 \\ x &= -6 \quad \text{lub} \quad x = 6. \end{aligned}$$

Ponieważ wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie, musi być $x = 6$.

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 13 (1 PKT)

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$. Stąd wynika, że

A) $\cos\alpha = \frac{24}{49}$ B) $\cos\alpha = \frac{5}{7}$ C) $\cos\alpha = \frac{25}{49}$ D) $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{6}}{7}$

ROZWIĄZANIE

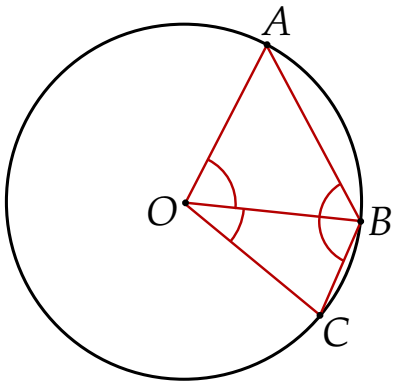
Obliczmy $\cos\alpha$ (z jedynki trygonometrycznej).

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{24}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 14 (1 PKT)

Na okręgu o środku w punkcie O leżą punkty A, B i C (zobacz rysunek). Kąt ABC ma miarę 121°, a kąt BOC ma miarę 40°.



Kąt AOB ma miarę

A) 59° B) 50° C) 81° D) 78°

Rozwiązanie

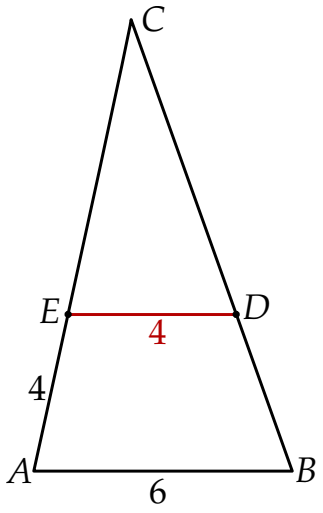
Zauważmy, że każdy z trójkątów AOB i BOC jest równoramienny. Mamy zatem

$$\begin{aligned}
&\measuredangle OCB = \measuredangle OBC = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ \\
&\measuredangle OAB = \measuredangle OBA = \measuredangle ABC - \measuredangle OBC = 121^\circ - 70^\circ = 51^\circ \\
&\measuredangle AOB = 180^\circ - \measuredangle OAB - \measuredangle OBA = 180^\circ - 51^\circ - 51^\circ = 78^\circ.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: **D**

Zadanie 15 (1 pkt)

W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC, a punkt E leży na boku AC. Odcinek DE jest równoległy do boku AB, a ponadto $|AE| = |DE| = 4$, $|AB| = 6$ (zobacz rysunek).



Odcinek CE ma długość

A) $\frac{16}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) 8 D) 6

Rozwiązanie

Trójkąty ACB i ECD są podobne, więc

$$\begin{aligned}
&\frac{CA}{CE} = \frac{AB}{ED} \\
&\frac{CE+4}{CE} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \qquad / \cdot 2CE \\
&2CE + 8 = 3CE \quad \Rightarrow \quad 8 = CE.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: **C**

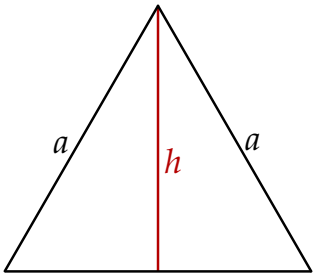
ZADANIE 16 (1 PKT)

Dany jest trójkąt równoboczny, którego pole jest równe $6\sqrt{3}$. Bok tego trójkąta ma długość

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$ D) $6\sqrt{2}$

ROZWIĄZANIE

Skorzystamy ze wzoru $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ na pole trójkąta równobocznego o boku a.



Mamy więc

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} \quad / \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$
$$a^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 17 (1 PKT)

Punkty $B = (-2, 4)$ i $C = (5, 1)$ są dwoma sąsiednimi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe

A) 29 B) 40 C) 58 D) 74

ROZWIĄZANIE

Obliczamy długość boku kwadratu

$$a = BC = \sqrt{(5+2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}.$$

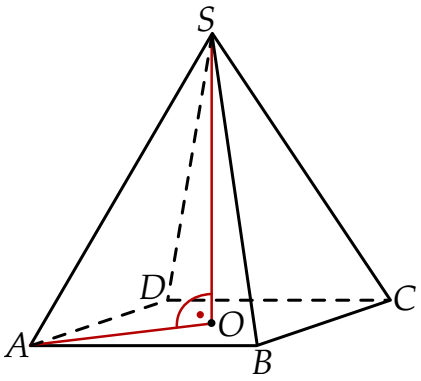
Pole jest więc równe

$$a^2 = 58.$$

Odpowiedź: **C**

ZADANIE 18 (1 PKT)

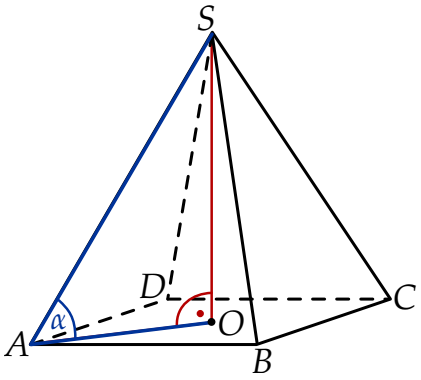
Na rysunku przedstawiono ostrosłup prawidłowy czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$.



Kąt nachylenia krawędzi bocznej SA ostrosłupa do płaszczyzny podstawy $ABCD$ to
A) $\measuredangle SAO$ B) $\measuredangle SAB$ C) $\measuredangle SOA$ D) $\measuredangle ASB$

ROZWIĄZANIE

Kąt nachylenia krawędzi SA do płaszczyzny podstawy to kąt $\measuredangle SAO$.



Odpowiedź: **A**

ZADANIE 19 (1 PKT)

Graniastosłup ma 14 wierzchołków. Liczba wszystkich krawędzi tego graniastosłupa jest równa
A) 14 B) 21 C) 28 D) 26

ROZWIĄZANIE

Liczba wierzchołków w graniastosłupie jest dwa razy większa niż liczba wierzchołków w podstawie. Zatem podstawę stanowi siedmiokąt, czyli wszystkich krawędzi jest $7 \cdot 3 = 21$ (7 na dole, 7 u góry i 7 krawędzi bocznych).

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 20 (1 PKT)

Prosta k przechodzi przez punkt $A = (4, -4)$ i jest prostopadła do osi Ox. Prosta k ma równanie

A) $x - 4 = 0$ B) $x - y = 0$ C) $y + 4 = 0$ D) $x + y = 0$

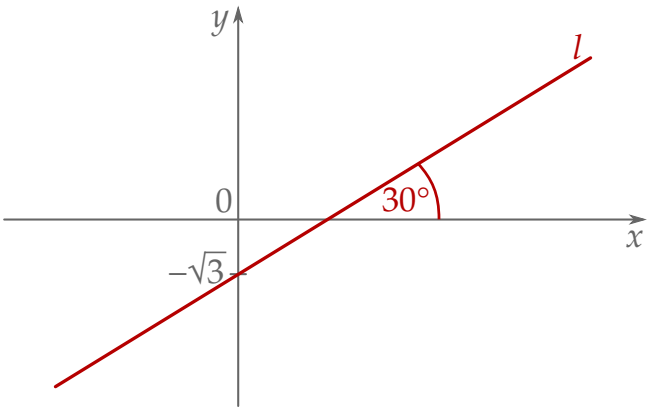
ROZWIĄZANIE

Prosta prostopadła do osi Ox musi być pionowa, czyli mieć równanie postaci $x = a$. Jeżeli ponadto przechodzi przez punkt $(4, -4)$, to musi to być prosta $x = 4$.

Odpowiedź: **A**

ZADANIE 21 (1 PKT)

Prosta l jest nachylona do osi Ox pod kątem 30° i przecina oś Oy w punkcie $(0, -\sqrt{3})$ (zobacz rysunek).



Prosta l ma równanie

A) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ B) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ C) $y = \frac{1}{2}x - \sqrt{3}$ D) $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{3}$

ROZWIĄZANIE

Podany kąt nachylenia prostej l oznacza, że jej współczynnik kierunkowy jest równy

$$a = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

To oznacza, że prosta l ma równanie postaci

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b.$$

Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu $(0, -\sqrt{3})$.

$$-\sqrt{3} = b.$$

Odpowiedź: **A**

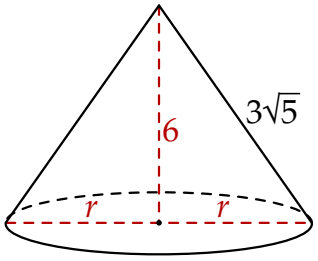
ZADANIE 22 (1 PKT)

Dany jest stożek o wysokości 6 i tworzącej $3\sqrt{5}$. Objętość tego stożka jest równa

A) 36π B) 18π C) 108π D) 54π

ROZWIĄZANIE

Szkicujemy stożek.



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczamy promień podstawy stożka.

$$r = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 6^2} = \sqrt{45 - 36} = \sqrt{9} = 3.$$

Zatem objętość jest równa

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 6 = 18\pi.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 23 (1 PKT)

Średnia arytmetyczna zestawu danych: x, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 jest równa 9. Wtedy mediana tego zestawu danych jest równa

A) 8 B) 9 C) 10 D) 16

ROZWIĄZANIE

Wykorzystujemy podaną informację o średniej, aby obliczyć x.

$$\frac{x+2+4+6+8+10+12+14}{8} = 9 \quad / \cdot 8$$
$$56 + x = 72 \quad \Rightarrow \quad x = 16.$$

Wypisujemy teraz dane liczby w kolejności rosnącej.

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16.$$

Liczb jest 8, więc mediana to średnia dwóch środkowych liczb.

$$\frac{8+10}{2} = 9.$$

Odpowiedź: **B**

ZADANIE 24 (1 PKT)

Ile jest wszystkich czterocyfrowych liczb naturalnych mniejszych niż 2017?
A) 2016 B) 2017 C) 1016 D) 1017

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Wszystkich liczb naturalnych mniejszych od 2017 jest 2016:

$$1, 2, 3, \ldots, 2015, 2016.$$

Wśród nich jest 999 liczb, które nie są czterocyfrowe:

$$1, 2, 3, \ldots, 999.$$

W takim razie jest

$$2016 - 999 = 1017$$

liczb czterocyfrowych mniejszych od 2017.

Sposób II

Liczb czterocyfrowych rozpoczynających się od jedynki (czyli mniejszych od 2000) jest

$$1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000.$$

Do tego jest 17 liczb pomiędzy 1999 i 2017. W sumie jest więc

$$1000 + 17 = 1017$$

liczb spełniających warunki zadania.

Odpowiedź: **D**

ZADANIE 25 (1 PKT)

Z pudełka, w którym jest tylko 6 kul białych i n kul czarnych, losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{1}{3}$. Liczba kul czarnych jest równa
A) $n = 9$ B) $n = 2$ C) $n = 18$ D) $n = 12$

ROZWIĄZANIE

Rozwiązujemy równanie

$$\frac{1}{3} = \frac{6}{6+n} \quad / \cdot 3(6+n)$$
$$6 + n = 18 \quad \Rightarrow \quad n = 12.$$

Odpowiedź: **D**

Zadania otwarte

ZADANIE 26 (2 PKT)

Rozwiąż nierówność $2x^2 + x - 6 \leqslant 0$.

ROZWIĄZANIE

Liczymy

$$\begin{aligned}
&2x^2 + x - 6 \leqslant 0\\
&\Delta = 1 + 48 = 49\\
&x = \frac{-1-7}{4} = -2 \quad \text{lub} \quad x = \frac{-1+7}{4} = \frac{3}{2}\\
&x \in \left\langle -2, \frac{3}{2} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Odpowiedź: $\left\langle -2, \frac{3}{2} \right\rangle$

ZADANIE 27 (2 PKT)

Rozwiąż równanie $(x^2 - 6)(3x + 2) = 0$.

ROZWIĄZANIE

Wyrażenie

$$x^2 - 6 = x^2 - (\sqrt{6})^2 = (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$$

zeruje się dla $x = \sqrt{6}$ i $x = -\sqrt{6}$. Natomiast wyrażenie

$$3x + 2 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

zeruje się dla $x = -\frac{2}{3}$. Dane równanie ma więc trzy rozwiązania

$$x \in \left\{-\sqrt{6}, -\frac{2}{3}, \sqrt{6}\right\}.$$

Odpowiedź: $x \in \left\{-\sqrt{6}, -\frac{2}{3}, \sqrt{6}\right\}$

ZADANIE 28 (2 PKT)

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$4x + \frac{1}{x} \geqslant 4.$$

Rozwiązanie

Przekształcamy daną nierówność w sposób równoważny. Ponieważ $x > 0$, możemy nierówność pomnożyć stronami przez x.

$$\begin{aligned} 4x + \frac{1}{x} &\geqslant 4 \quad / \cdot x \\ 4x^2 + 1 &\geqslant 4x \\ 4x^2 - 4x + 1 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Prawdziwość otrzymanej nierówności uzasadnimy na dwa sposoby.

Sposób I

Zauważmy, że lewa strona nierówności to pełen kwadrat

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2.$$

To oczywiście oznacza, że nierówność ta jest zawsze spełniona.

Sposób II

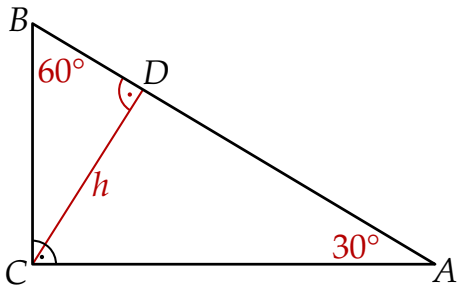
Wykresem lewej strony nierówności (traktowanej jako funkcja zmiennej x) jest parabola o ramionach skierowanych w górę, której wierzchołek leży na osi Ox (bo $\Delta = 0$). To oznacza, że nierówność ta rzeczywiście jest prawdziwa.

Zadanie 29 (2 pkt)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\measuredangle ACB| = 90$ i $|\measuredangle ABC| = 60^\circ$. Niech D oznacza punkt wspólny wysokości poprowadzonej z wierzchołka C kąta prostego i przeciwprostokątnej AB tego trójkąta. Wykaż, że $|AD| : |DB| = 3 : 1$.

Rozwiązanie

Szkicujemy opisaną sytuację.



Jeżeli oznaczymy $CD = h$, to w trójkątach prostokątnych BCD i ACD mamy

$$\begin{aligned} \frac{CD}{BD} &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad BD = \frac{CD}{\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3}} \\ \frac{CD}{AD} &= \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad AD = \frac{h}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3h}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Zatem rzeczywiście $AD = 3BD$.

ZADANIE 30 (2 PKT)

Ze zbioru liczb $\{1,2,4,5,10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą wylosowaną liczbę jest liczbą całkowitą.

ROZWIĄZANIE

Każdą z liczb możemy wybrać na 5 sposobów, więc

$$|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25.$$

Wypiszmy wszystkie możliwe zdarzenia sprzyjające:

$$\begin{aligned}
&(10,10),(10,5),(10,2),(10,1)\\
&(5,5),(5,1)\\
&(4,4),(4,2),(4,1)\\
&(2,2),(2,1)\\
&(1,1).
\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo jest więc równe

$$\frac{12}{25}.$$

Odpowiedź: $\frac{12}{25}$

ZADANIE 31 (2 PKT)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geqslant 1$, w którym spełniona jest równość $a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 100$. Oblicz sumę $a_{25} + a_{26}$.

ROZWIĄZANIE

Sposób I

Korzystamy ze wzoru $a_n = a_1 + (n-1)r$ na n–ty wyraz ciągu arytmetycznego.

$$\begin{aligned}
100 &= a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = \\
&= a_1 + 20r + a_1 + 23r + a_1 + 26r + a_1 + 29r = 4a_1 + 98r \quad / : 4\\
25 &= a_1 + 24,5r.
\end{aligned}$$

W takim razie

$$a_{25} + a_{26} = (a_1 + 24r) + (a_1 + 25r) = 2a_1 + 49r = 2(a_1 + 24,5r) = 2 \cdot 25 = 50.$$

Sposób II

Jeżeli oznaczymy przez r różnicę ciągu (a_n), to

$$\begin{aligned} 100 &= a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = \\ &= a_{25} - 4r + a_{25} - r + a_{25} + 2r + a_{25} + 5r = 4a_{25} + 2r \quad / : 2 \\ 50 &= 2a_{25} + r. \end{aligned}$$

Stąd

$$a_{25} + a_{26} = a_{25} + a_{25} + r = 2a_{25} + r = 50.$$

Odpowiedź: **50**

ZADANIE 32 (4 PKT)

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -2$ i $x_2 = 6$. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $A = (1, -5)$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f.

ROZWIĄZANIE

Trójmian o pierwiastkach $x_1 = -2$ i $x_2 = 6$ ma postać iloczynową

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x + 2)(x - 6).$$

Podstawiamy współrzędne punktu A i wyznaczamy współczynnik a

$$\begin{aligned} -5 &= a(1 + 2)(1 - 6) \\ -15a &= -5 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Zatem trójmian ma postać iloczynową

$$f(x) = \frac{1}{3}(x + 2)(x - 6).$$

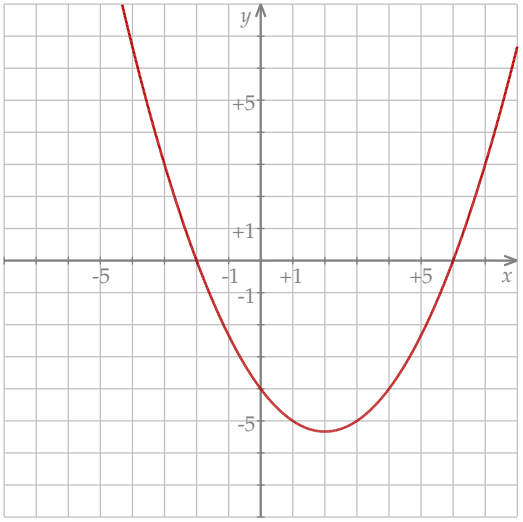
Wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w górę i pierwszej współrzędnej wierzchołka

$$x_w = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

(wierzchołek zawsze znajduje się w środku pomiędzy pierwiastkami). W takim razie wartość najmniejsza funkcji to

$$f(2) = \frac{1}{3}(2 + 2)(2 - 6) = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot (-4) = -\frac{16}{3}.$$

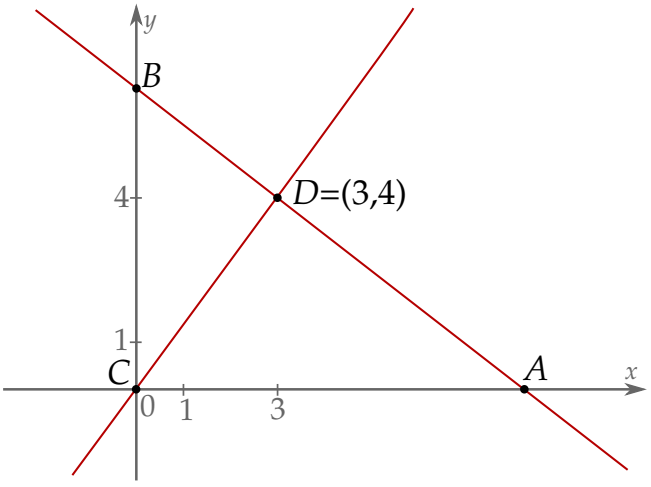
Na koniec wykres dla ciekawskich.



Odpowiedź: $f_{min} = f(2) = -\frac{16}{3}$

ZADANIE 33 (4 PKT)

Punkt $C = (0,0)$ jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego ABC, którego wierzchołek A leży na osi Ox, a wierzchołek B na osi Oy układu współrzędnych. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C przecina przeciwprostokątną AB w punkcie $D = (3,4)$.



Oblicz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta oraz długość przeciwprostokątnej AB.

ROZWIĄZANIE

Rozpocznijmy od napisania równania wysokości CD. Jest to prosta postaci $y = ax$ (bo przechodzi przez początek układu współrzędnych). Współczynnik a wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu D.

$$4 = 3a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{3}.$$

To oznacza, że współczynnik kierunkowy prostej AB, która jest prostopadła do CD jest równy $-\frac{3}{4}$. Ma więc ona równanie postaci $y = -\frac{3}{4}x + b$. Współczynnik b wyznaczamy podstawiając współrzędne punktu D.

$$4 = -\frac{3}{4}\cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad b = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}.$$

Prosta AB ma więc równanie $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$. W szczególności $B = \left(0, \frac{25}{4}\right)$. Aby wyznaczyć współrzędne punktu A rozwiązujemy równanie

$$-\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \quad / \cdot \frac{4}{3}$$
$$x = \frac{25}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{25}{3}.$$

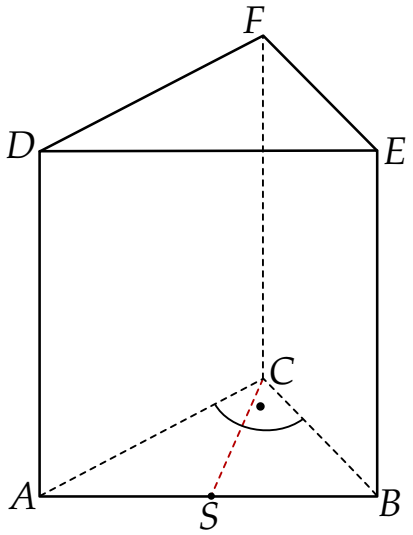
Zatem $A = \left(\frac{25}{3}, 0\right)$. Pozostało obliczyć długość odcinka AB.

$$AB = \sqrt{\left(0 - \frac{25}{3}\right)^2 + \left(\frac{25}{4} - 0\right)^2} =$$
$$= \sqrt{25^2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{16}\right)} = 25\sqrt{\frac{25}{9\cdot 16}} = 25\cdot\frac{5}{3\cdot 4} = \frac{125}{12}.$$

Odpowiedź: $A = \left(\frac{25}{3}, 0\right)$, $B = \left(0, \frac{25}{4}\right)$, $|AB| = \frac{125}{12}$

ZADANIE 34 (5 PKT)

Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\measuredangle ACB| = 90^\circ$ (zobacz rysunek). Stosunek długości przyprostokątnej AC tego trójkąta do długości przyprostokątnej BC jest równy 4:3. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a długość odcinka SC jest równa 5. Pole ściany bocznej $BEFC$ graniastosłupa jest równe 48. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



ROZWIĄZANIE

Środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym to dokładnie środek przeciwprostokątnej (przyprostokątna jest średnicą tego okręgu). Zatem

$$SA = SB = SC = 5.$$

Stąd $AB = 10$. Jeżeli teraz oznaczymy $AC = 4x$ i $BC = 3x$, to na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy

$$\begin{aligned} 100 = AB^2 = AC^2 + BC^2 = 16x^2 + 9x^2 = 25x^2 \quad / : 25 \\ 4 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2. \end{aligned}$$

Mamy stąd $AC = 8$ i $BC = 6$. Wykorzystujemy teraz informację o polu ściany $BEFC$.

$$48 = BC \cdot BE = 6 \cdot BE \quad \Rightarrow \quad BE = 8.$$

Objętość graniastosłupa jest więc równa

$$V = P_{ABC} \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 = 192.$$

Odpowiedź: $V = 192$